APUNTE DE CIRCUNFERENCIA

INTRODUCCIÓN

Definición

Sea O punto del plano P y r un real positivo, entonces se denomina *circunferencia de centro O y radio r (C (O , r))*, al conjunto formado por y sólo por los puntos del plano P que están a una distancia r del punto O.

$$C(O, r) = \{A \in \mathrm{P} : OA = r\}$$

Círculo

Se define como *círculo* de una circunferencia, a la unión de ésta con su interior.

Ejemplo: en la figura 1, se ha dibujado una circunferencia con su círculo.

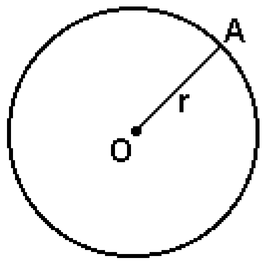


fig. 1

$C(O, r)$: circunferencia de centro O y radio r

$\overline{OA}$: radio

$OA = r$

ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

Radio

Se denomina *radio* de una circunferencia, a cada trazo cuyos extremos son un punto de la circunferencia y el centro de ella. Su longitud se designa por *r.*

Ejemplo: en la figura 1, $\overline{OA}$ es radio de la circunferencia.

Cuerda, diámetro y arco

Se denomina *cuerda* de una circunferencia, a todo trazo cuyos extremos pertenecen a ella. Si el centro de la circunferencia pertenece a dicha cuerda, ésta recibe el nombre de *diámetro* de la circunferencia.

Al subconjunto de la circunferencia determinado por esta cuerda se le denomina *arco* de la circunferencia.

Ejemplo: en la figura 2, $\overline{AB}$ es cuerda, $\overset{\frown}{AB}$ es arco y $\overline{CD}$ es diámetro de la circunferencia.

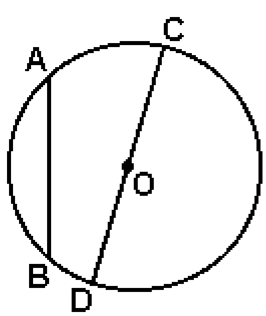


fig. 2

$\overline{AB}$: cuerda

$\overline{CD}$: diámetro

$CD = d = 2r$

$\overset{\frown}{AB}$: arco

La longitud del *diámetro* se designa generalmente por *d* y se cumple que:

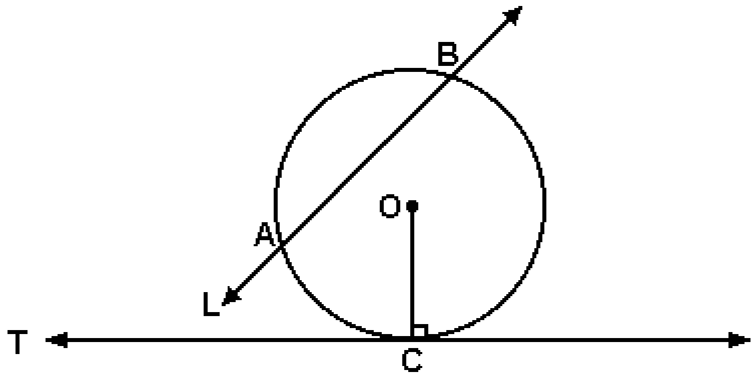
$$d = 2r$$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Secante y tangente

Se denomina *secante* de una circunferencia a cada recta que la intersecta en dos puntos. Si una recta la intersecta en un y sólo un punto se llama *tangente* de la circunferencia.

Ejemplo: en la figura 3, L es secante y T es tangente a la circunferencia en el punto C. Al trazo $\overline{OC}$ se le llama *radio de contacto* y es perpendicular a la tangente.



L : secante
T : tangente
$\overline{OC}$: radio de contacto
$\overline{OC} \perp T$

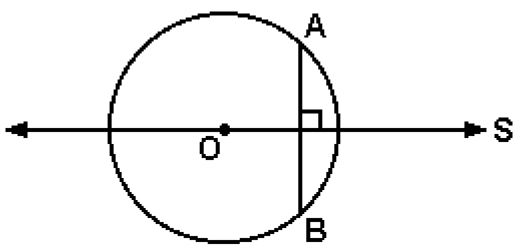
fig. 3

Apunte 1

Teoremas

Teorema 1 : en cada circunferencia, el radio de contacto es perpendicular a la tangente respectiva.

Teorema 2 : en cada circunferencia, la simetral de cada cuerda pasa por el centro de esa circunferencia.

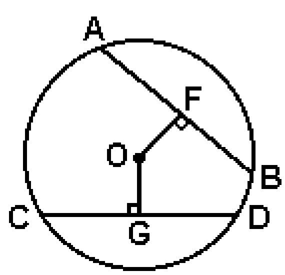


S : simetral de $\overline{AB}$
$O \in S$

fig. 4

Apunte 2

Teorema 3: En cada circunferencia, dos cuerdas son congruentes si y sólo si están a igual distancia del centro de ésta.



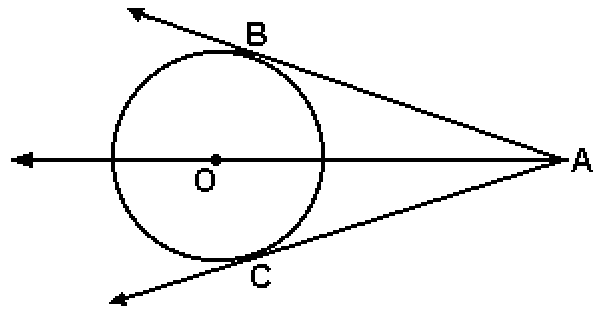
$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow OF = OG$

fig. 5

Apunte 3

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Teorema 4: en cada circunferencia, si desde un punto exterior a ella se trazan dos rayos tangentes a la circunferencia, los segmentos determinados son congruentes y además la bisectriz del ángulo que forman esos rayos, pasa por el centro de la circunferencia.



$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$: tangentes

$AB = AC$

$\overrightarrow{AO}$: bisectriz del ángulo $\angle BAC$

fig. 6

Apunte 4

PERÍMETRO Y ÁREA

Dada una circunferencia de radio r, entonces su *perímetro* y el *área* de su círculo son:

Perímetro de la circunferencia $= 2\pi r$

Área del círculo $= \pi r^2$

Apunte 5

Teorema 5: dadas dos circunferencias de radios r y r', entonces:

$$\frac{\text{Perímetro de la circunferencia } C'(O', r')}{\text{Perímetro de la circunferencia } C(O, r)} = \frac{r'}{r}$$

$$\frac{\text{Área del círculo } C'(O', r')}{\text{Área del círculo } C(O, r)} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2$$

Ejemplo: si los radios de dos circunferencias están en la razón $2 : 3$, entonces sus perímetros están en la razón $2 : 3$ y las áreas de sus círculos en la razón $4 : 9$, respectivamente.

Semicircunferencia y semicírculo

En toda circunferencia de radio r, cada diámetro determina en ella dos semicircunferencias y dos semicírculos. Además se cumple que:

$$\text{Perímetro de la semicircunferencia} = \pi r$$

$$\text{Área del semicírculo} = \frac{\pi r^2}{2}$$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dadas dos circunferencias coplanares, C (O , r) y C' (O' , r') se dan, entre otras, las siguientes situaciones:

Circunferencias secantes

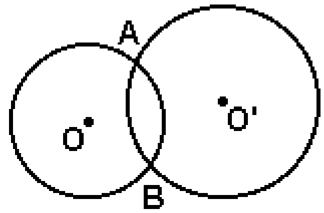


fig. 7

Circunferencias concéntricas

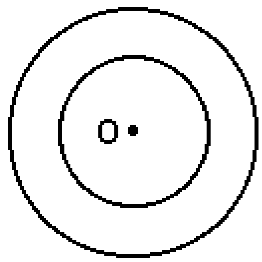
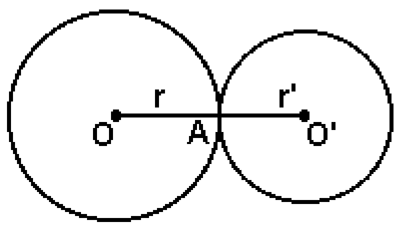


fig. 8

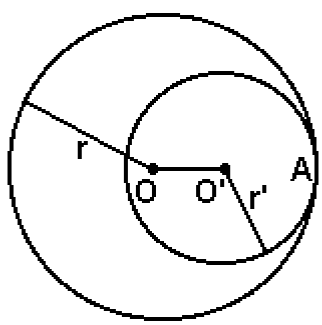
Circunferencias tangentes exteriormente



$$OO' = r + r'$$

fig. 9

Circunferencias tangentes interiormente



$$OO' = |r - r'|$$

fig. 10

Apunte 6

CONGRUENCIA

Dos circunferencias son congruentes si y sólo si sus radios son de igual medida.

$$C'(O', r') \cong C(O, r) \Leftrightarrow r' = r$$

ÁNGULOS

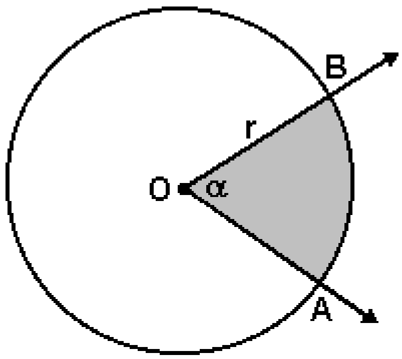
Ángulo del centro

Angulo del centro de una circunferencia es aquel cuyo vértice es el centro de ella.

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Sector circular

A la intersección del interior de un ángulo del centro con el círculo de la circunferencia respectiva, se le denomina *sector circular.*



$\angle$ AOB : ángulo del centro

$$m\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \alpha$$

$$\frac{\text{longitud del arco } \overset{\frown}{AB}}{2\,\pi\,r} = \frac{\alpha}{360^{\circ}}$$

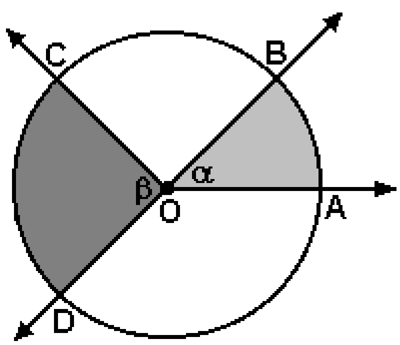
$$\frac{\text{área del sector circular AOB}}{\pi\,r^{2}} = \frac{\alpha}{360^{\circ}}$$

fig. 11

Apunte 7

Apunte 8

Teorema 6: en toda circunferencia, la magnitud de un ángulo del centro y la longitud del arco comprendido respectivo, son directamente proporcionales. Lo mismo ocurre entre el ángulo del centro y el área del sector circular correspondiente.



$$\frac{\text{longitud del arco } \overset{\frown}{AB}}{\alpha} = \frac{\text{longitud del arco } \overset{\frown}{CD}}{\beta}$$

$$\frac{\text{área del sector circular AOB}}{\alpha} = \frac{\text{área del sector circular COD}}{\beta}$$

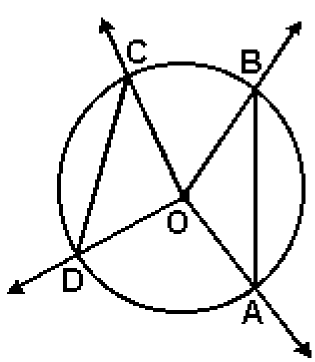
fig. 12

Teorema 7: en cada circunferencia, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Las cuerdas son congruentes.

b) Los arcos subtendidos por ellas son congruentes.

c) Los ángulos del centro correspondientes son congruentes.



$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

$$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$$

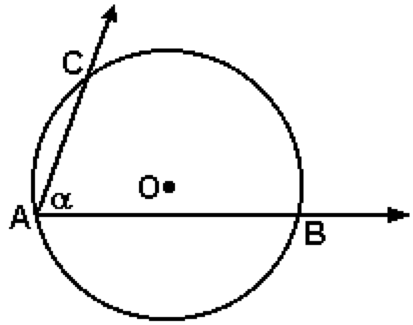
$$\angle\, AOB \cong \angle\, COD$$

fig. 13

© NELSON LILLO TERÁN
Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Ángulo inscrito

Angulo inscrito en una circunferencia, es aquel cuyo vértice pertenece a ella y sus lados son secantes a la circunferencia.



$\angle BAC$: ángulo inscrito

$$\alpha = \frac{m\left(\overset{\frown}{BC}\right)}{2}$$

fig. 14

Apunte 9

Teorema 8: todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

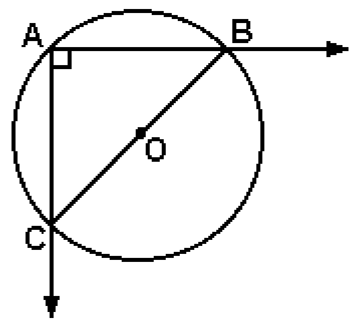
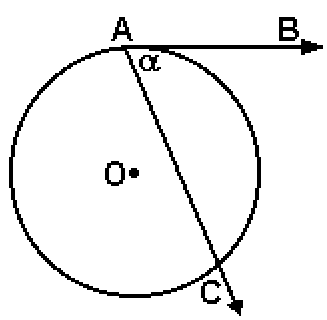


fig. 15

Ángulo semiinscrito

Un ángulo está semiinscrito a una circunferencia si y sólo si su vértice pertenece a ella, un lado es secante y el otro es tangente a esa circunferencia.



$\angle CAB$: ángulo semiinscrito

$$\alpha = \frac{m\left(\overset{\frown}{CA}\right)}{2}$$

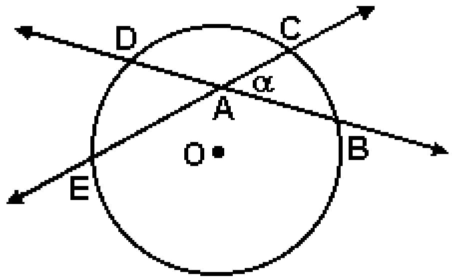
fig. 16

Junio 2017

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Ángulo interior

Angulo interior de una circunferencia, es aquel cuyo vértice está en el interior de ella.



$\angle BAC$: ángulo interior

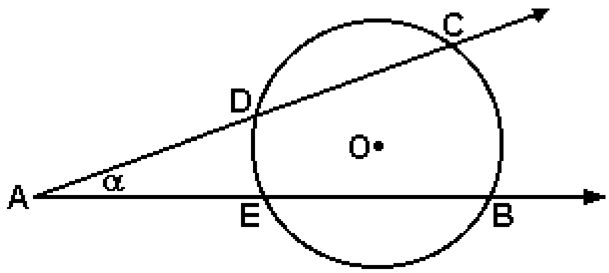
$$\alpha = \frac{m\left(\widehat{BC}\right) + m\left(\widehat{DE}\right)}{2}$$

fig. 17

[Apunte 10]

Ángulo exterior

Angulo exterior de una circunferencia, es aquel cuyo vértice está en el exterior de ella y sus lados la interceptan.



$\angle BAC$: ángulo exterior

$$\alpha = \frac{\left| m\left(\widehat{BC}\right) - m\left(\widehat{DE}\right) \right|}{2}$$

fig. 18

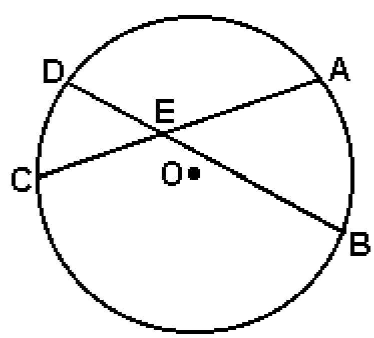
[Apunte 11]

PROPORCIONALIDADES EN LA CIRCUNFERENCIA

Teorema de las cuerdas

En cada circunferencia, si dos cuerdas se interceptan en su interior, entonces los segmentos determinados en cada una de ellas, son inversamente proporcionales.

Al producto de las magnitudes de esos segmentos de cada cuerda, se le denomina potencia del punto interior (punto de intersección).



$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$: cuerdas

$AE \times CE = BE \times DE$

fig. 19

[Apunte 12]

Junio 2017

http://www.eneayudas.cl

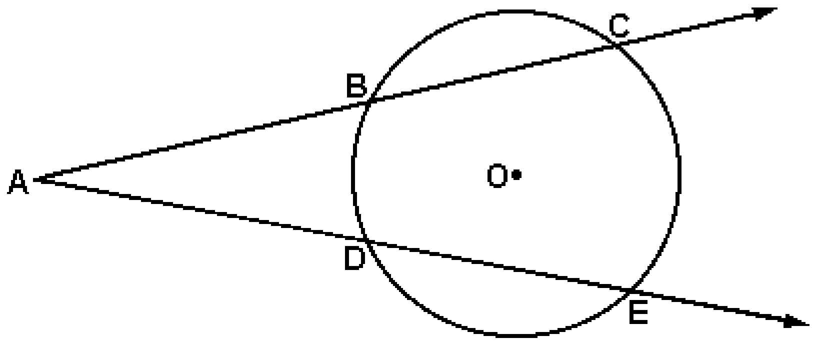
matematicayciencias@gmail.com

+56998581588

Teorema de las secantes

En cada circunferencia, si dos secantes a ella se interceptan en su exterior, entonces los segmentos exterior y mayor determinados en cada una de ellas, son inversamente proporcionales.

Al producto de las magnitudes de esos segmentos de cada secante, se le denomina potencia del punto exterior (punto de intersección).



$\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$: secantes

$AB \times AC = AD \times AE$

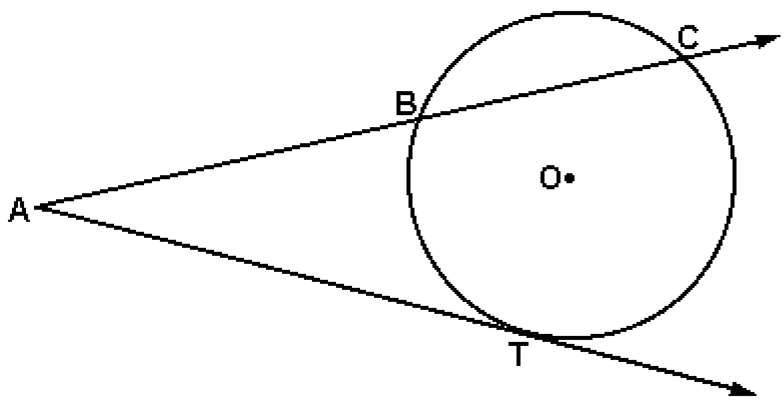
fig. 20

Apunte 13

Teorema de la secante y tangente

En cada circunferencia, si una tangente y una secante a ella se interceptan en su exterior, entonces el segmento determinado en la tangente es media proporcional geométrica entre los segmentos exterior y mayor determinados en la secante.

Al producto de las magnitudes de esos segmentos de la secante, se le denomina potencia del punto exterior (punto de intersección).



$\overrightarrow{AC}$: secante

$\overrightarrow{AT}$: tangente

$AB \times AC = (AT)^2$

fig. 21

Apunte 14

BIBLIOGRAFÍA

Circunferencia (curso interactivo en línea con examen incluido)

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588