LÍMITE

INTRODUCCIÓN

Sea f una función real definida en (a, b), con la posible excepción de $x_0 \in (a, b)$. Se dice que $L \in \mathbf{R}$ es el límite de f, cuando x tiende a x_0, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\mathbf{0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon}$$

y se expresa así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Cuando se dice que x tiende a x_0, no se hace referencia a como lo hace. Para precisar la forma en que x se acerca a x_0, se habla de límite por la derecha y de límite por la izquierda.
Se dice que $L \in \mathbf{R}$ es el límite de f, cuando x tiende por la derecha a x_0, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\mathbf{0 < x - x_0 < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon}$$

y se expresa así:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Se dice que $L \in \mathbf{R}$ es el límite de f, cuando x tiende por la izquierda a x_0, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\mathbf{0 < x_0 - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon}$$

y se expresa así:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Queda claro que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Ejemplo: demuestre que $\lim\limits_{x \to 7} 3x = 21$

Hay que demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que:

$$0 < |x - 7| < \delta \quad \Rightarrow \quad |3x - 21| < \varepsilon$$

Desarrollo:

$$0 < |x - 7| < \delta \quad \Rightarrow \quad |3(x - 7)| < \varepsilon$$

$$0 < |x - 7| < \delta \quad \Rightarrow \quad 3|x - 7| < \varepsilon$$

$$0 < |x - 7| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x - 7| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Queda claro que eligiendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ se satisface lo pedido.

Ejemplo: demuestre que $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 4x - 5) = 7$

Hay que demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 + 4x - 5 - 7| < \varepsilon$$

Desarrollo:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 + 4x - 12| < \varepsilon$$

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 2||x + 6| < \varepsilon$$

Tomemos $\delta = 1$, entonces:

$$0 < |x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1$$

$$0 < |x - 2| < 1 \Rightarrow 7 < x + 6 < 9$$

$$0 < |x - 2| < 1 \Rightarrow |x + 6| < 9$$

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \delta|x + 6| < 9\delta < \varepsilon$$

Queda claro que eligiendo $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{9}\right\}$ se satisface lo pedido.

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

LÍMITES IMPORTANTES

1. $$\lim_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{1}{x} \right]^{x} = e$$

$$y = \left[1 + \frac{1}{x} \right]^{x}$$

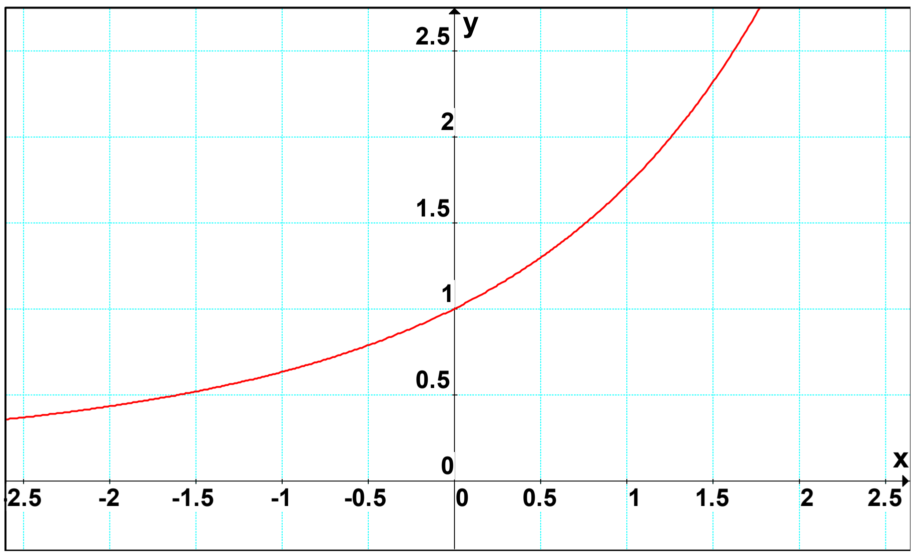
2. $$\lim_{x \to 0^{+}} [1 + x]^{1/x} = e$$

$$y = [1 + x]^{1/x}$$

Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

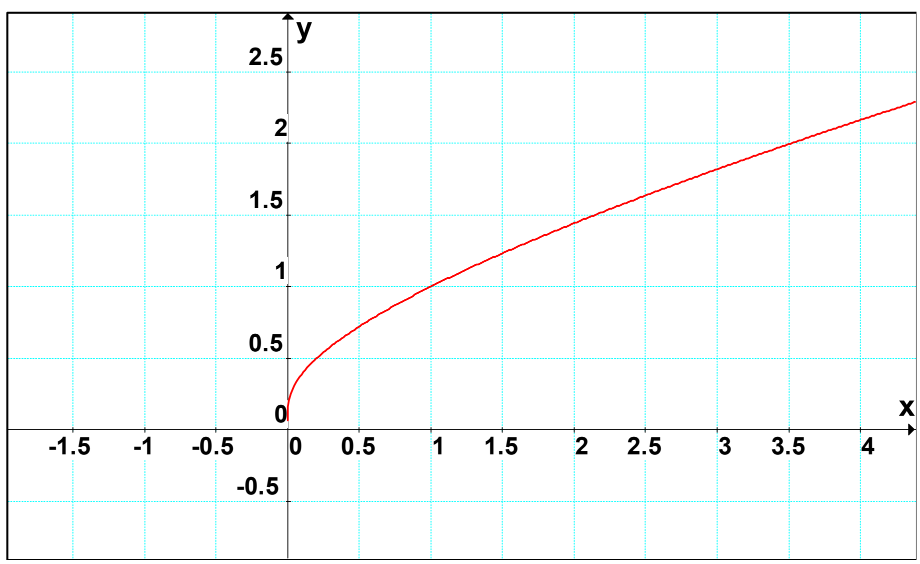
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$

$$y = \frac{e^{x} - 1}{x}$$



4. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln(x)} = 1$

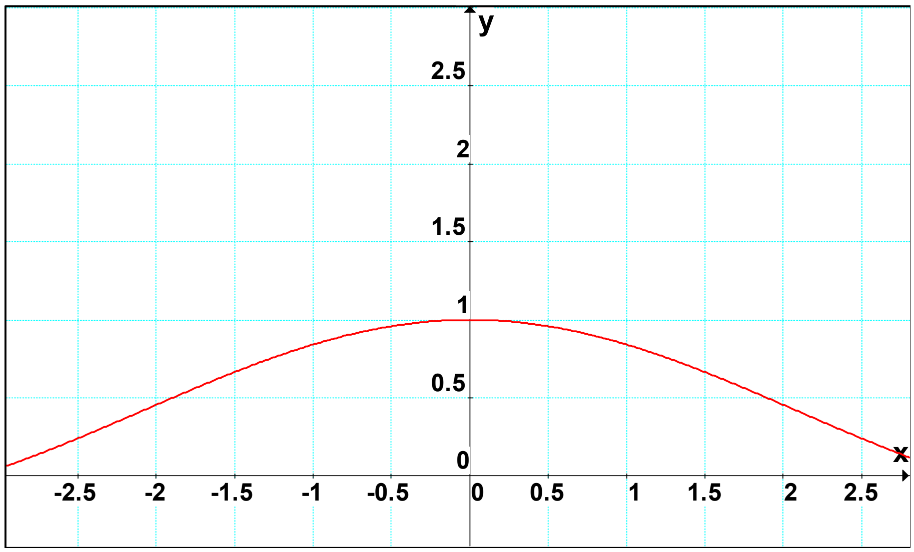
$$y = \frac{x - 1}{\ln(x)}$$



Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

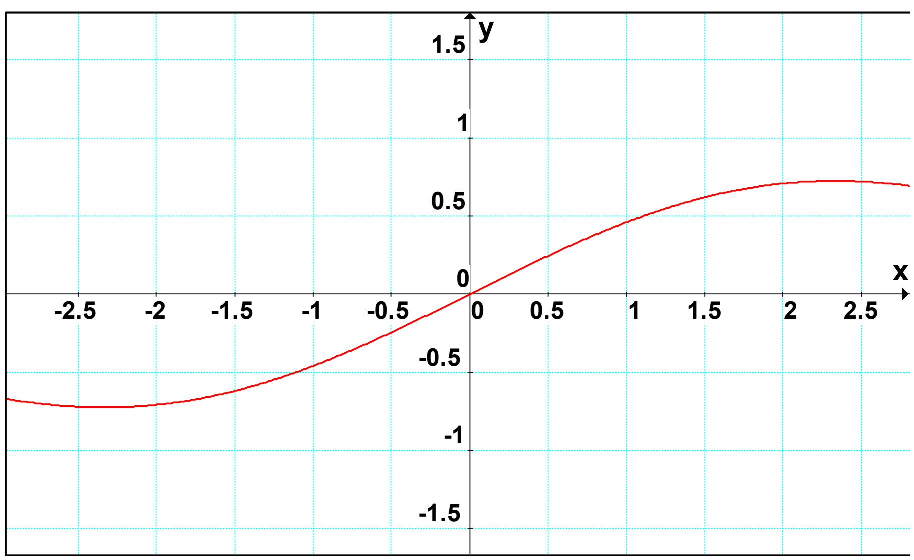
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$

$$y = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$



6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

$$y = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

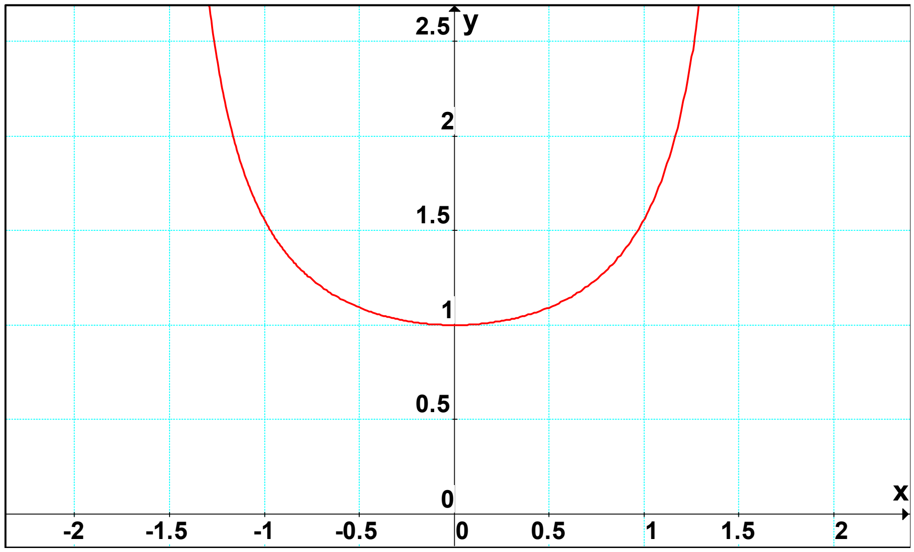


Agosto 2018

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

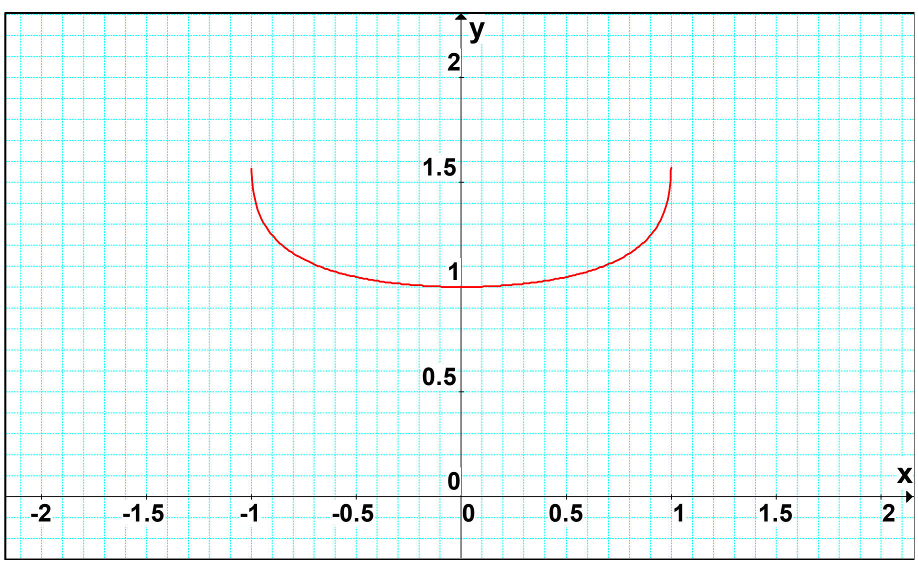
7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{tg(x)}{x} = 1$

$$y = \frac{tg(x)}{x}$$



8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen^{-1}(x)}{x} = 1$

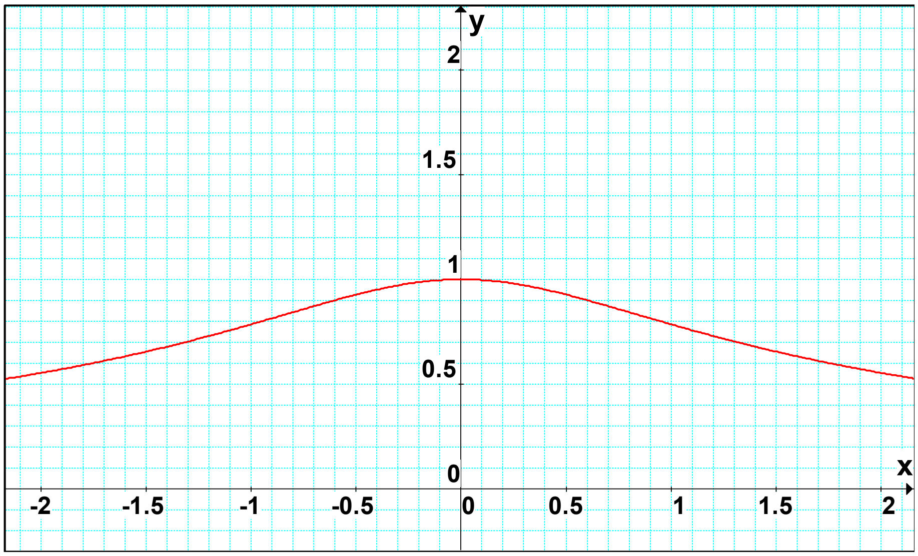
$$y = \frac{sen^{-1}(x)}{x}$$



Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

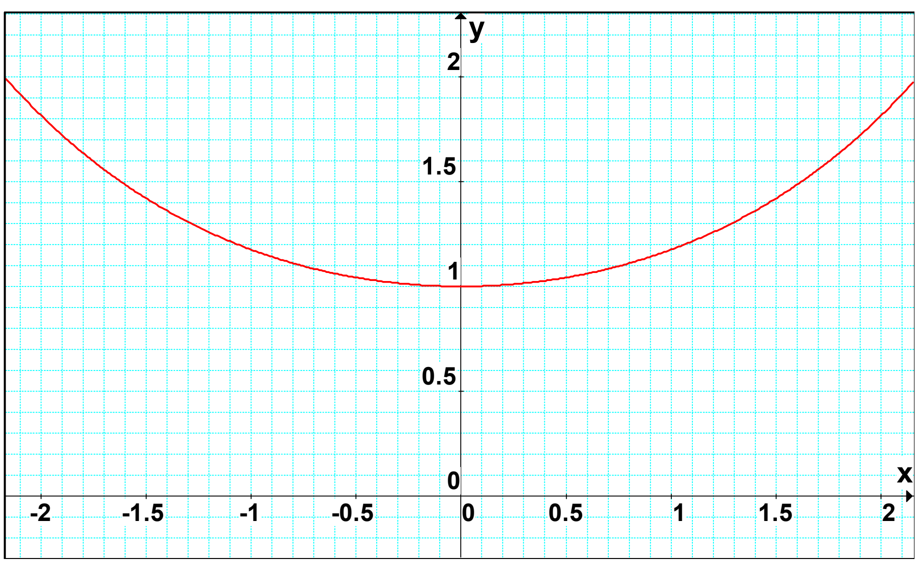
9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{tg^{-1}(x)}{x} = 1$

$$y = \frac{tg^{-1}(x)}{x}$$



10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{senh(x)}{x} = 1$

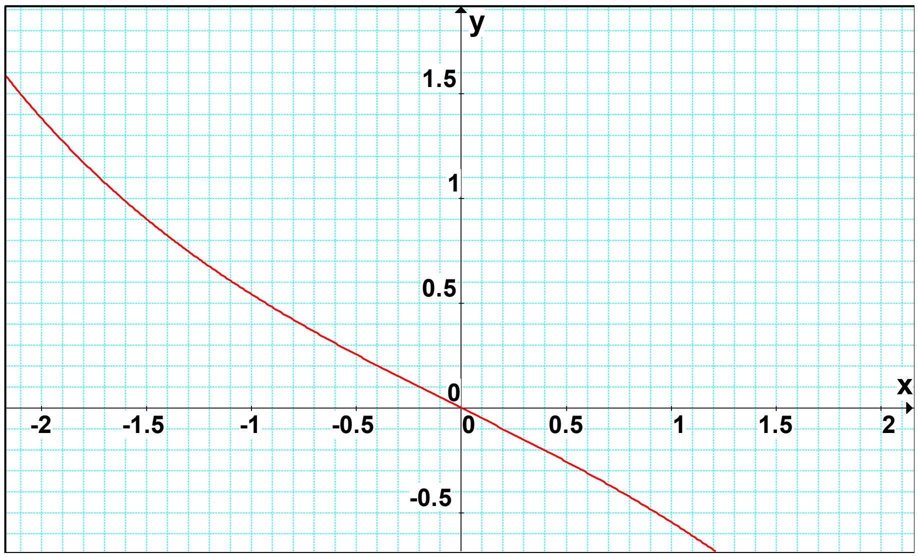
$$y = \frac{senh(x)}{x}$$



Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

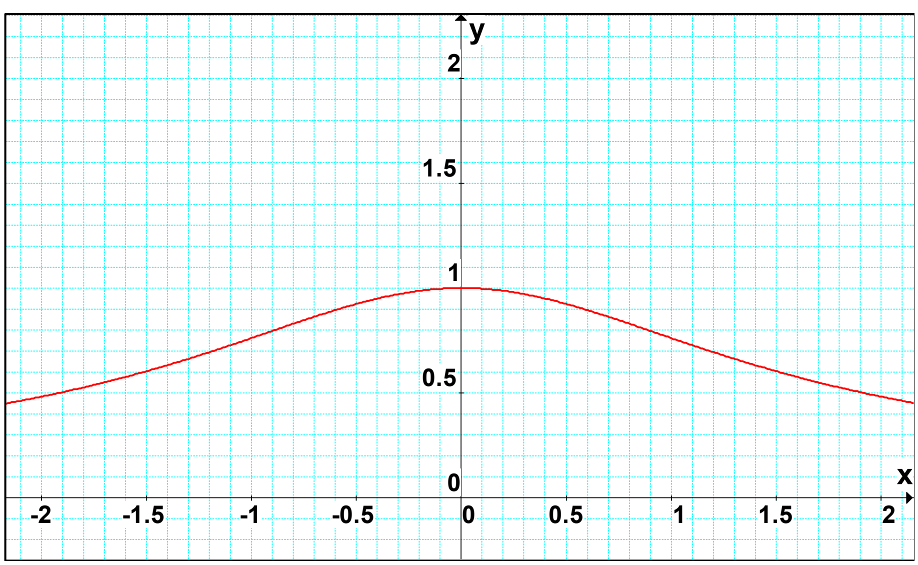
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cosh(x)}{x} = 0$

$$y = \frac{1 - \cosh(x)}{x}$$



12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgh(x)}{x} = 1$

$$y = \frac{tgh(x)}{x}$$



Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

TEOREMAS SOBRE LÍMITES

Sean $a \in R$, $c \in R$, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ **y** $\lim_{x \to a} g(x) = M$, **entonces:**

1. $\lim_{x \to a} c = c$

2. $\lim_{x \to a} x = a$

3. $\lim_{x \to a} \left[- f(x) \right] = - L$

4. $\lim_{x \to a} \left[f(x) + c \right] = L + c$

5. $\lim_{x \to a} \left[f(x) - c \right] = L - c$

6. $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = L + M$

7. $\lim_{x \to a} \left[f(x) - g(x) \right] = L - M$

8. $\lim_{x \to a} c\, f(x) = c\, L$

9. $\lim_{x \to a} \left[f(x) \times g(x) \right] = L \times M$

10. $L \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \left[\dfrac{1}{f(x)} \right] = \dfrac{1}{L}$

11. $M \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{L}{M}$

12. $\lim_{x \to \infty} \left[\dfrac{1}{x} \right] = 0$

13. $n \in N \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{n} = L^{n}$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Ejemplo: calcule $\lim\limits_{x \to 4} 2x^3$

Respuesta: $\lim\limits_{x \to 4} 2x^3 = 2\left[\lim\limits_{x \to 4} x\right]^3 = 2 \times 4^3 = 128$

Ejemplo: calcule $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Respuesta: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 6$

Ejemplo: calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x - 5}{8x + 7}$

Respuesta: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x - 5}{8x + 7} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x\left(4 - \frac{5}{x}\right)}{x\left(8 + \frac{7}{x}\right)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588