NÚMERO COMPLEJO

INTRODUCCIÓN

La siguiente ecuación no tiene solución en R :

$$x^2 + 1 = 0$$

ॐ es necesario idear nuevos números.

Definición:

$$i = \sqrt{-1}$$

Resolución de la ecuación dada anteriormente:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm i$$

Observación: i recibe el nombre de unidad imaginaria.

POTENCIAS DE i

$$i^0 = 1 = i^{-4}$$

$$i^1 = i = i^{-3}$$

$$i^2 = -1 = i^{-2}$$

$$i^3 = -i = i^{-1}$$

Teorema 1: Sean n , q y r números enteros , entonces:

$$n = 4q + r \Rightarrow i^n = i^r$$

Ejemplos:

$$21 = 4 \times 5 + 1 \Rightarrow i^{21} = i^1 = i$$

$$-13 = 4 \times (-3) + (-1) \Rightarrow i^{-13} = i^{-1} = -i$$

RAÍZ CUADRADA PRINCIPAL DE UN NÚMERO REAL NEGATIVO

Sea a un número real positivo, entonces:

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Importante:

Cuando se efectúan operaciones con raíces cuadradas principales, de números reales negativos, es obligatorio proceder como lo muestra el ejemplo anterior, para no cometer errores. A continuación se dan ejemplos de lo aquí expuesto:

1) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-27} = i\sqrt{3} \times i\sqrt{27} = i^2\sqrt{81} = -9$

2) $\sqrt{20} \div \sqrt{-5} = 2\sqrt{5} \div i\sqrt{5} = 2 \times i^{-1} = -2i$

3) $\left(\sqrt{-4}\right)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

$$C = \{a + bi : a \in R \wedge b \in R\}$$

Sea $z = a + bi$ un número complejo, entonces:

$a = R(z)$ (parte real de z)

$b = \mathrm{Im}(z)$ (parte imaginaria de z)

$b = 0 \Rightarrow z$ es un complejo real $\Rightarrow R \subset C$

$b \neq 0 \wedge a = 0 \Rightarrow z$ es un imaginario puro

Ejemplos:

$z_1 = 7 + 0i$ es un complejo real

$z_2 = 0 + 4i$ es un imaginario puro

RELACIÓN DE IGUALDAD (=)

Sean $a + bi$ y $c + di$, números complejos, entonces:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Ejemplo:

$$x + 5i = -3 + yi \Leftrightarrow x = -3 \wedge y = 5$$

ADICIÓN

Sean $a + bi$ y $c + di$, números complejos, entonces:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo:

$$5 + 4i + 8 - 3i = 13 + i$$

Teorema 2: La adición de números complejos es asociativa y conmutativa.

Neutro aditivo:

$$0 = 0 + 0i$$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Inverso aditivo:

Sea $a + bi$ un número complejo, entonces su inverso aditivo es:

$$-(a + bi) = -a - bi$$

Ejemplo:

$$-(3 - 5i) = -3 + 5i$$

Teorema 3: $(C\ ;\ +)$ es un grupo abeliano.

Resta:

Sean $a + bi$ y $c + di$, números complejos, entonces:

$$\begin{aligned}(a + bi) - (c + di) &= (a + bi) + (-(c + di)) \\ &= (a + bi) + (-c - di)) \\ &= (a - c) + (b - d)i\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$8 + 2i - (7 - i) = 1 + 3i$$

MULTIPLICACIÓN

Sean $a + bi$ y $c + di$, números complejos, entonces:

$$(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(2 + 3i) \times (4 + 5i) &= 8 + 10i + 12i + 15i^2 \\ &= 8 - 15 + 22i \\ &= -7 + 22i\end{aligned}$$

Teorema 4: La multiplicación de números complejos es asociativa, conmutativa y distributiva con respecto a la adición.

Neutro multiplicativo:

$$1 = 1 + 0i$$

Inverso multiplicativo:

Sea $a + bi$ un número complejo distinto de $0 + 0i$, entonces su inverso multiplicativo es:

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

$$(3 - 4i)^{-1} = \frac{1}{3 - 4i} = \frac{3 + 4i}{25}$$

Teorema 5: $(C\ ;\ +\ ,\ \times)$ es un campo.

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

División:

Sean $a + bi$ y $c + di$ números complejos, éste último distinto de $0 + 0i$, entonces:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \times (c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Ejemplo:

$$\frac{4 + i}{2 + 3i} = \frac{(4 + i) \times (2 - 3i)}{13} = \frac{11 - 10i}{13}$$

Multiplicación entre un número real y un número complejo:

Sean $a + bi$ un número complejo y k un número real, entonces:

$$k(a + bi) = ka + kbi$$

Ejemplo:

$$4(3 + 2i) = 12 + 8i$$

CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $a + bi$ un número complejo, entonces su conjugado, $\overline{a + bi}$, se define así:

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

Ejemplo:

$$\overline{5 - 9i} = 5 + 9i$$

Teorema 7: Sean z y w números complejos, entonces:

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$z + \overline{z} \in R$$

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{-z} = -\overline{z}$$

$$\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$

$$z \times \overline{z} \geq 0$$

$$\overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w}$$

$$z \neq 0 \Rightarrow \overline{z^{-1}} = \left(\overline{z}\right)^{-1}$$

$$w \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

Noviembre 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $a + b i$ un número complejo, entonces su módulo, $|a + b i|$, se define así:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

$$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Teorema 8: Sean z y w números complejos, entonces:

$$|z| \geq 0$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$|-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}| = |z|$$

$$z \times \overline{z} = |z|^2$$

$$z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$|z \times w| = |z| \times |w|$$

$$z \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$$

$$w \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

FORMA PAR ORDENADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El número complejo $a + b i$ se puede representar como el par ordenado (a, b). De esta forma todo lo anterior también se trabaja con esta representación, por ejemplo:

Relación de igualdad:

Sean (a, b) y (c, d) números complejos, entonces:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Adición:

Sean (a, b) y (c, d) números complejos, entonces:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Ejemplo:

$$(4, 6) + (-2, 7) = (2, 13)$$

Noviembre 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Multiplicación:

Sean (a, b) y (c, d) números complejos, entonces:

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

Ejemplo:

$$(4, 6) \times (-2, 7) = (-8 - 42,\ 28 - 12) = (-50, 16)$$

Multiplicación por un número real:

Sea (a, b) un número complejo y k un número real, entonces:

$$k(a, b) = (ka, kb)$$

Ejemplo:

$$5(7, -4) = (35, -20)$$

Unidad imaginaria:

La unidad imaginaria se representa así: $(0, 1)$. Su cuadrado se obtiene de la siguiente forma:

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$$

Conjugado:

Sea (a, b) un número complejo, entonces su conjugado $\overline{(a, b)}$ se define así:

$$\overline{(a, b)} = (a, -b)$$

Ejemplo:

$$\overline{(9, -2)} = (9, 2)$$

Módulo:

Sea (a, b) un número complejo, entonces su módulo $|(a, b)|$ se define así:

$$|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

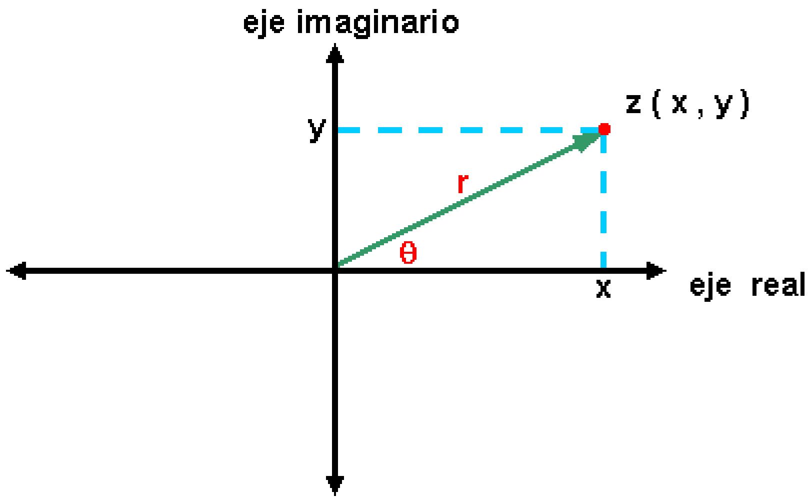
Ejemplo:

$$|(-6, 8)| = \sqrt{36 + 64} = 10$$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea el número complejo $z = x + y\,i \neq 0 + 0\,i$. Si se representa en el plano complejo:



Se puede ver claramente que:

$$z = r (\cos (^{-}) + i \operatorname{sen} (^{-}))$$

Donde:

$$x = r \cos (^{-})$$

$$y = r \operatorname{sen} (^{-})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = | z |$$

$$\tan (\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad , \quad x > 0$$

$$\theta = 180^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad , \quad x < 0$$

$$\theta = 90^\circ \quad , \quad x = 0 \ \wedge \ y > 0$$

$$\theta = -90^\circ \quad , \quad x = 0 \ \wedge \ y < 0$$

Noviembre 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Operatoria

Sean z y w dos números complejos no nulos ($\neq 0 + 0i$), donde:

$$z = r\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$w = t\,(\cos(\phi) + i\,\mathrm{sen}(\phi))$$

Entonces:

$$zw = rt\,(\cos(\theta + \phi) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \phi))$$

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{t}\left(\cos(\theta - \phi) + i\,\mathrm{sen}(\theta - \phi)\right)$$

Teorema de De Moivre

Sea el número complejo $z = r\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ ($\neq 0 + 0i$) y el número real n, entonces se cumple que:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$$

Raíces enésimas de un número complejo no nulo

Sea el número complejo $z = r\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ ($\neq 0 + 0i$) y el número entero positivo $n > 1$, entonces para calcular las n raíces enésimas de un complejo no nulo se tiene que desarrollar:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 360^{\circ} \times k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 360^{\circ} \times k}{n}\right)\right) \quad , \quad k \in Z \;\wedge\; 0 \leq k < n$$

Por lo tanto, cada número complejo no nulo tiene n raíces enésimas.

BIBLIOGRAFÍA

Números complejos (recursos interactivos en línea)

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588