CÁLCULO DE PROBABILIDADES

INTRODUCCIÓN

Generalmente, cuando realizamos una acción voluntaria y como consecuencia de ésta se obtiene un resultado, nos damos cuenta, a partir del comportamiento de esos resultados, que podemos clasificarlas en experimentos deterministas y experimentos aleatorios.

Experimento determinista

Se denomina experimento determinista a aquel que, dada las mismas condiciones, nos entrega un mismo resultado, sin importar las veces que se repita. Por ejemplo, si queremos saber que gas se obtiene cuando se agrega un trozo de zinc a una solución de ácido clorhídrico, siempre conseguiremos hidrógeno.

Experimento aleatorio

Si al realizar un experimento varias veces bajo, prácticamente, las mismas condiciones, nos entrega resultados diferentes, diremos que es aleatorio. Un ejemplo de esto es sacar una ficha de una bolsa, donde hay muchas de ellas y de diferentes colores.

Esta clase de experimentos condujo al concepto y estudio de la probabilidad.

CONCEPTOS

Espacio muestral (Ω)

Espacio muestral es el conjunto universo de los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Ejemplo: Si el experimento se basa en la elección de un dígito, entonces el espacio muestral es:

$$\Omega = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$$

Cada uno de los elementos del espacio muestral se denomina punto muestral o muestra.

Suceso o evento

Suceso o evento es el conjunto de resultados favorables de un experimento. Es subconjunto del espacio muestral. Si consta de un sólo elemento, se denomina suceso elemental.

Ejemplo: Sean A el conjunto de los dígitos pares y B el conjunto de los dígitos divisibles por 3, entonces:

$$A = \{ 0 , 2 , 4 , 6 , 8 \}$$

$$B = \{ 0 , 3 , 6 , 9 \}$$

MODELOS DE PROBABILIDAD

Para el cálculo de probabilidades se han definido distintos modelos. A continuación se introducen dos de los más conocidos y empleados.

Modelo de probabilidades de Laplace

Si suponemos que cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral finito tiene la misma opción de ocurrir, obtenemos un espacio finito equiprobable.

Por lo tanto, si ese espacio tiene n elementos, la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales es $\frac{1}{n}$.

Como consecuencia de lo anteriormente afirmado, concluimos que la probabilidad de que ocurra un suceso A es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman, en otras palabras, es el cuociente

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

entre el número de resultados favorables (o cardinalidad de A) y el número de resultados posibles (o cardinalidad de Ω):

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Esta probabilidad es a priori, es decir, se obtiene antes, o sin necesidad, de realizar el experimento, por lo tanto es una probabilidad teórica. Es un situación idealizada.

Modelo de frecuencia relativa

Frecuencia absoluta

La frecuencia absoluta es el número de veces que se ha cumplido un resultado.

Frecuencia relativa

La frecuencia relativa es el cuociente entre el número de veces que se ha cumplido un resultado y el número de veces que se ha realizado el experimento.

Ley de los grandes números

Esta ley afirma que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse a medida de que crece el número de experimentos.

Basándonos en esta ley y en los conceptos anteriores, podemos definir la probabilidad de un suceso A, a través de la frecuencia relativa de A ($f(A)$) , como:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A)$$

Se puede afirmar que ésta es una probabilidad a posteriori.

CÁLCULOS

Probabilidad de que ocurra un suceso cierto ($P(\Omega)$):

$$P(\Omega) = 1$$

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito menor que 20.

Respuesta: El conjunto de los dígitos menores que 20 es Ω.

$$\therefore \; P(\Omega) = 1$$

Probabilidad de que ocurra un suceso imposible ($P(\varnothing)$):

$$P(\varnothing) = 0$$

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito mayor que 10.

Respuesta: El conjunto de los dígitos mayores que 10 es $\varnothing$.

$$\therefore \; P(\varnothing) = 0$$

Probabilidad de que ocurra el suceso A ($P(A)$):

$$0 \le P(A) \le 1$$

Ejemplos: Probabilidad de elegir un dígito par.

Respuesta: $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Probabilidad de elegir un dígito divisible por 3.

Respuesta: $P(B) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

Probabilidad de que no ocurra el suceso A (P (A’)):

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Ejemplos: Probabilidad de elegir un dígito impar.

Respuesta: $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Probabilidad de elegir un dígito que no sea divisible por 3.

Respuesta: $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

Probabilidad de que ocurran ambos sucesos simultáneamente, A y B ($P(A \cap B)$):

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito que sea par y divisible por 3.

Respuesta: $P(A \cap B) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

Probabilidad de que ocurra al menos un suceso, o A , o B , o ambos ($P(A \cup B)$):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito que sea par y / o divisible por 3.

Respuesta: $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{10}$

Probabilidad de que ocurra un y sólo un suceso, o A , o B, pero no ambos ($P(A \cup B) - P(A \cap B)$):

$$P((A \cup B) - (A \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito que sea par o divisible por 3 , pero que no posea ambas propiedades.

Respuesta: $P((A \cup B) - (A \cap B)) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2}$

Probabilidad de que ocurra el suceso A, pero no el suceso B ($P(A \cap B')$):

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito que sea par, pero no divisible por 3.

Respuesta: $P(A \cap B') = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{10}$

Probabilidad de que ocurra a lo más uno de los sucesos, o A , o B , o ninguno, pero no ambos ($P(A' \cup B')$):

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito que a lo más tenga una de las siguientes propiedades: ser par o ser divisible por 3.

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Respuesta: $P(A' \cup B') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Probabilidad de que no ocurra el suceso A , ni tampoco el suceso B ($P(A' \cap B')$):

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito que sea impar y que no sea divisible por 3.

Respuesta: $P(A' \cap B') = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

Probabilidad condicionada

Probabilidad de que ocurra el suceso A, si ha ocurrido el suceso B ($P(A|B)$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B) \neq 0$$

Ejemplo: Probabilidad de elegir un dígito par, entre los dígitos divisibles por 3.

Respuesta: $P(A|B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$

Relaciones entre sucesos

Sucesos independientes

A y B son sucesos independientes, si la probabilidad de que ocurra uno de ellos, no es afectada por la ocurrencia o no ocurrencia del otro, es decir:

$$P(A|B) = P(A|B') = P(A) \quad ; \quad P(B) \neq 0 \text{ y } P(B) \neq 1$$

Regla de la multiplicación

Si dos sucesos son independientes, entonces la probabilidad de que ocurran simultáneamente es igual al producto de sus probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ejemplo: La probabilidad de elegir un dígito par, no es afectada si el dígito elegido es divisible por 3 o no es divisible por 3.

En general, dados dos sucesos, A ($P(A) \neq 0$) y B ($P(B) \neq 0$) , la probabilidad de que ocurran simultáneamente está dada por:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A) \quad ; \quad P(A) \neq 0 \wedge P(B) \neq 0$$

Sucesos excluyentes

A y B son sucesos excluyentes, si es imposible que ambos ocurran simultáneamente. Siempre se cumple que:

$$P(A \cap B) = 0$$

Ejemplo: La probabilidad de elegir un dígito, que sea mayor que 7 y menor que 4 , a la vez, es 0.

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Regla de la adición

Si dos sucesos son excluyentes, entonces la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos es igual a la suma de sus probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos complementarios

A y B son sucesos complementarios, si además de ser excluyentes abarcan todas las posibilidades. Siempre se cumple que:

$$P(A \cap B) = 0 \quad \wedge \quad P(A) + P(B) = 1$$

Ejemplo: La probabilidad de elegir un dígito que sea par e impar a la vez es 0 y la probabilidad de elegir un dígito que sea par o impar es igual a 1.

Partición del espacio muestral

Los sucesos $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ conforman una partición del espacio muestral si:

1º) Para cada B_i se tiene que $P(B_i) \neq 0 \qquad ; \; 1 \leq i \leq n$

2º) Dado cualquier par de sucesos siempre se cumple que:

$$P(B_i \cap B_j) = 0 \qquad ; \; i \neq j$$

3º) $P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + \ldots + P(B_n) = 1$

Ejemplo: Dos sucesos complementarios siempre conforman una partición del espacio muestral.

En general, si tenemos un conjunto de eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, que conforman una partición del espacio muestral , entonces para cada suceso A de ese espacio se tiene que:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

Esto nos conduce a lo siguiente:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$$

Por lo tanto, aplicando la regla de la multiplicación, llegamos a que:

$$P(A) = P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n) \times P(A \mid B_n)$$

Ejemplo: Se tienen 20 ampolletas iguales en forma y tamaño, excepto que 12 son de 75 W y 8 de 100 W.

La probabilidad de que una ampolleta, elegida al azar, de 75 W esté defectuosa es $\frac{1}{6}$ y que una de 100 W , también lo esté, es $\frac{1}{4}$. Si se elige una al azar, la probabilidad de que esté defectuosa es:

$$\frac{12}{20} \times \frac{1}{6} + \frac{8}{20} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Modelo binomial (Bernoulli)

Sea n número de ensayos, p probabilidad de éxito en un intento ($0 \leq p \leq 1$) y k número de éxitos ($0 \leq k \leq n$). Según este modelo, la probabilidad de tener exactamente k éxitos en n ensayos (P_k) es:

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Donde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n - k)!}$$ y se denominan coeficientes binomiales.

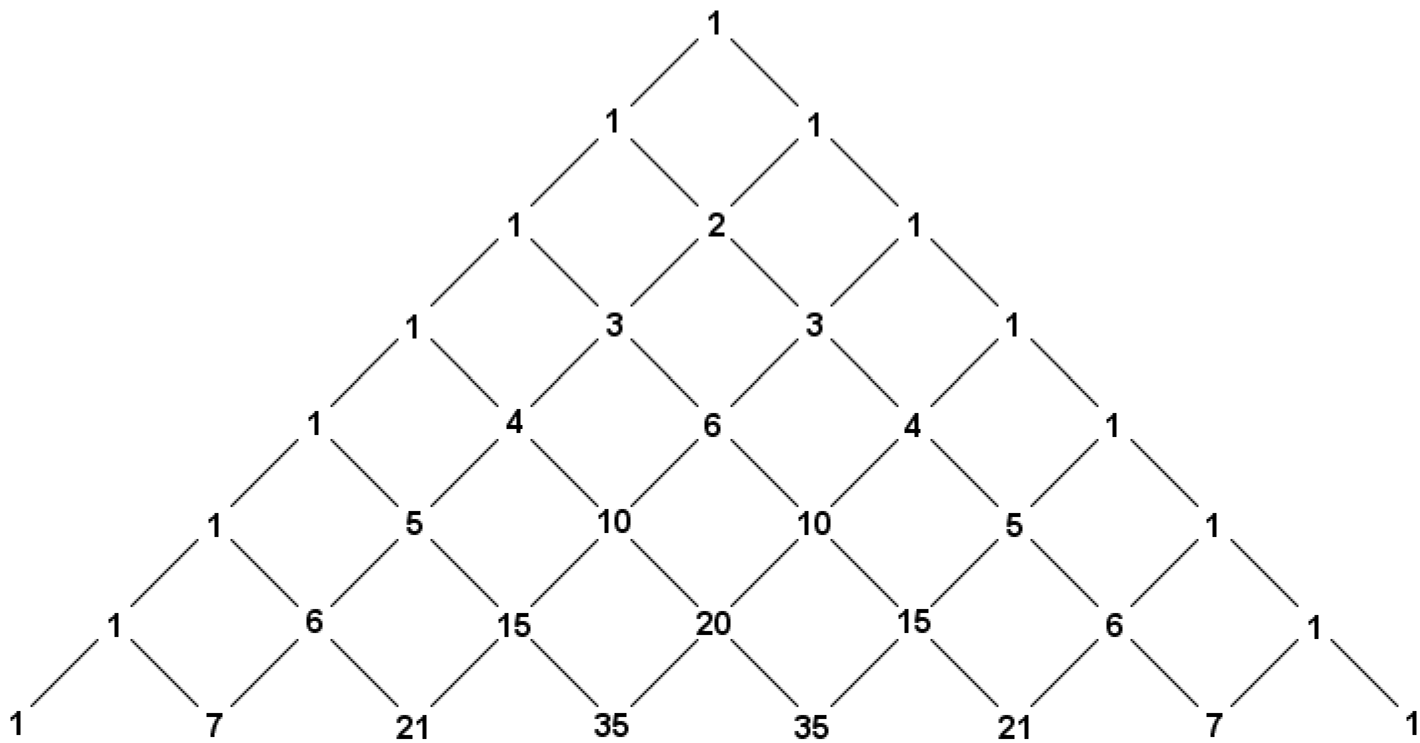
Ejemplo: La probabilidad de obtener exactamente 2 sellos al lanzar 3 veces una moneda al aire es:

$$P_2 = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

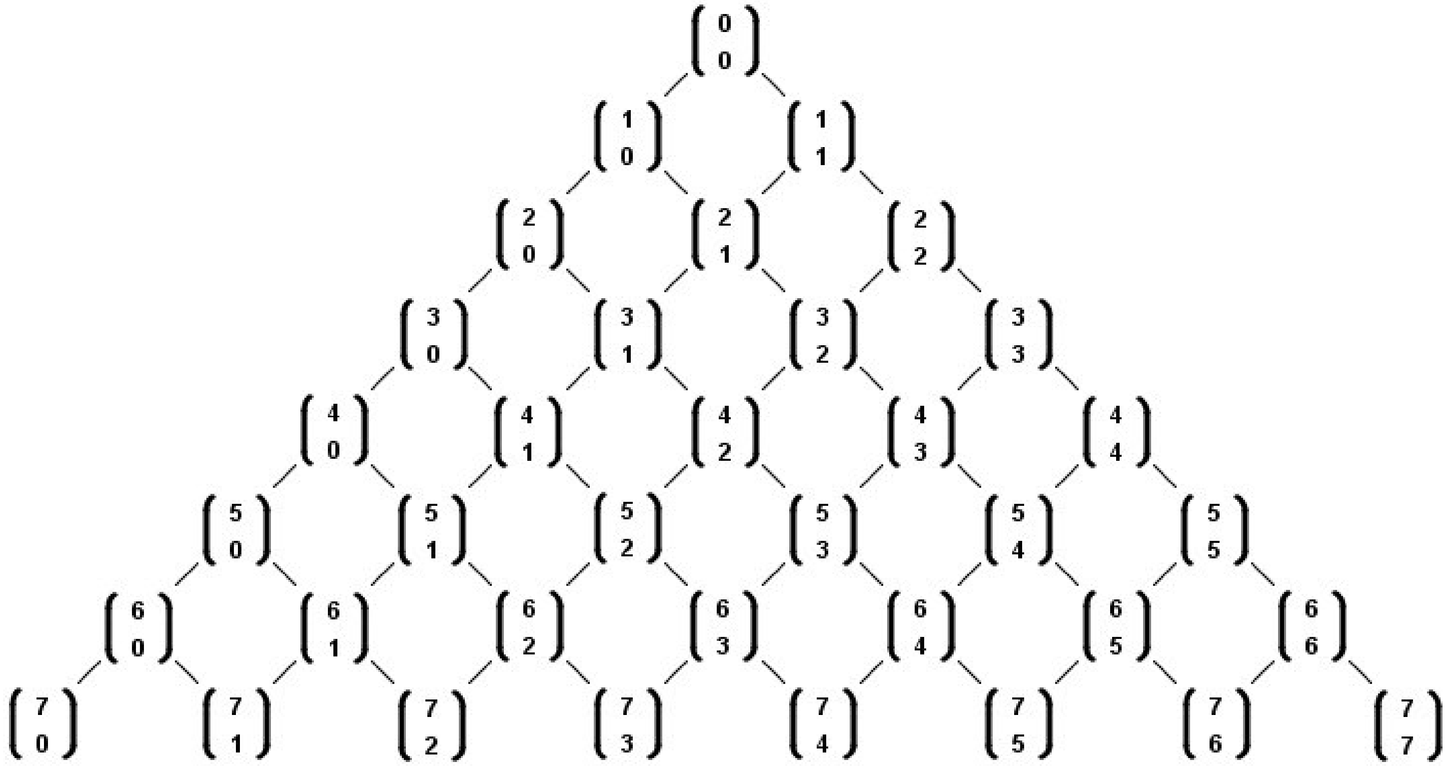
El ejemplo anterior nos presenta un caso especial en el que la probabilidad de obtener éxito es 1/2 , esto nos lleva a que:

$$P_k = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

El triángulo de Pascal nos presenta estos coeficientes binomiales de manera ordenada:



© NELSON LILLO TERÁN
Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588



Primer ejemplo, si nos fijamos en la fila 1 – 2 – 1 , ésta nos indica que si lanzamos 2 veces una moneda al aire, de 4 resultados posibles ($1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$) en uno de ellos obtenemos 2 sellos, en 2 obtenemos un sello y una cara, y en uno obtenemos 2 caras.

Segundo ejemplo, si nos fijamos en la fila 1 – 4 – 6 – 4 – 1 , ésta nos indica que si lanzamos 4 veces una moneda al aire, de 16 resultados posibles ($1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$) en uno de ellos obtenemos 4 sellos, en 4 obtenemos 3 sellos y una cara, en 6 obtenemos 2 sellos y 2 caras, en 4 obtenemos un sello y 3 caras, y en uno obtenemos 4 caras.

BIBLIOGRAFÍA

Probabilidad (curso interactivo en línea con examen incluido)

Agosto 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588