

RAÍZ

RAÍZ ENÉSIMA

Definición:

Sean a número real, n número natural mayor que 1 y b un número no necesariamente real, entonces:

$$b^n = a \Leftrightarrow b \text{ es raíz enésima de } a$$

Observación: cada número real no nulo tiene n raíces enésimas. El 0 tiene solamente una.

Ejemplo: $2^3 = 8 \quad \therefore 2$ es una de las tres raíces cúbicas de 8.

RAÍZ ENÉSIMA PRINCIPAL (O ARITMÉTICA)

Definición:

- Si $a \geq 0$ y n es par, entonces b es su raíz enésima principal si y sólo si:

$$b^n = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Ejemplo: $7^2 = 49 \quad \therefore 7$ es la raíz cuadrada principal de 49.

- Si a es un número real y n es impar, entonces b es su raíz enésima principal si y sólo si:

$$b^n = a \quad \text{y} \quad b \text{ es un número real}$$

Ejemplo: $(-5)^3 = -125 \quad \therefore -5$ es la raíz cúbica principal de -125 .

Simbología:

Si b es raíz enésima principal de a , esto se simboliza de la siguiente forma:

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplos: $7 = \sqrt{49}$

$$-5 = \sqrt[3]{-125}$$

Observación: si $a < 0$ y n es par, entonces a no tiene raíz enésima principal real.

[Apunte 1](#)

[Ejercicios 1](#)

[Apunte 2](#)

[Ejercicios 2](#)

Propiedades

Sean a y b números reales positivos, m y n números naturales mayores que 1 y p número entero, entonces

$$1) \left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a$$

Ejemplo: $\left(\sqrt[3]{17} \right)^3 = 17$

$$2) \sqrt[n]{a} > 0$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt[3]{64} = 4 > 0$$

$$3) n \text{ impar} \Rightarrow \sqrt[n]{-a} < 0$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt[3]{-729} = -9 < 0$$

$$4) \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt[3]{8^3} = 8$$

$$5) n \text{ impar} \Rightarrow \sqrt[n]{(-a)^n} = -a$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$$

$$6) n \text{ par} \Rightarrow \sqrt[n]{(-a)^n} = a$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\text{Observación: } a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$$

$$7) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\text{Ejemplos: } \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$8) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{Ejemplos: } \frac{\sqrt[3]{2000}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{2000}{2}} = \sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\sqrt{\frac{15}{196}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{196}} = \frac{\sqrt{15}}{14}$$

$$9) \sqrt[n]{m\sqrt{a}} = m\sqrt[n]{\sqrt{a}} = m\sqrt[n]{a}$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{8}} = \sqrt{2}$$

$$10) \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$$

POTENCIA DE EXPONENTE RACIONAL

Definición:

Sean $a > 0$, n número natural mayor que 1 y p número entero, entonces:

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Propiedades:

Las potencias de exponente racional cumplen todas las propiedades de las potencias de exponente entero y además la siguiente:

$$a^{\frac{p}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^p$$

$$\text{Ejemplo: } 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27} \right)^2 = 3^2 = 9$$

Observación: Las potencias de base positiva y exponente real, también cumplen todas las propiedades de las potencias de exponente entero.

RACIONALIDAD

Para determinar si una expresión real es racional o irracional, hay que tener presente lo siguiente:

- La suma y el producto de dos números racionales, son racionales.

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$$

- La suma y el producto de un número racional no nulo y un número irracional, son irracionales.

$$\text{Ejemplo: } 2 + \sqrt{3} \text{ y } 2\sqrt{3} \text{ son irracionales.}$$

- La suma y el producto de dos números irracionales, pueden ser racionales o irracionales.

$$\text{Ejemplos: } \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ es irracional,}$$

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \text{ es racional,}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10} \text{ es irracional,}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4 \text{ es racional.}$$

- Sean n un número natural mayor que 1 y a un entero positivo, entonces:

$$\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \in \mathbb{I}$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt{7} \text{ no es un número natural } \therefore \text{ es irracional.}$$

➤ Sean n un número impar positivo mayor que 1 y a un entero, entonces:

$$\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \in \mathbb{I}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{-2}$ no es un número entero \therefore es irracional.

➤ Sean n un número natural mayor que 1 y a un irracional, entonces:

$$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \in \mathbb{I}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{9}$ es un número real \therefore es irracional.

RACIONALIZACIÓN

Ejemplos: 1) $\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$

2) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = 3\sqrt[3]{4}$

3) $\frac{12}{3 - \sqrt{7}} = \frac{12}{3 - \sqrt{7}} \times \frac{3 + \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}} = \frac{12(3 + \sqrt{7})}{9 - 7} = 6(3 + \sqrt{7})$

4) $\frac{9}{1 + \sqrt[3]{2}} = \frac{9}{1 + \sqrt[3]{2}} \times \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{9(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{1 + \sqrt[3]{2^3}}$
 $= \frac{9(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{3} = 3(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$