RAÍZ ENÉSIMA

Definición:

Sean a número real, n número natural mayor que 1 y b un número no necesariamente real, entonces:

$$b^n = a \quad \Leftrightarrow \quad b \text{ es raíz enésima de } a$$

Observación: cada número real no nulo tiene n raíces enésimas. El 0 tiene solamente una.

Ejemplo: $2^3 = 8 \quad \therefore \quad 2$ es una de las tres raíces cúbicas de 8.

RAÍZ ENÉSIMA PRINCIPAL (O ARITMÉTICA)

Definición:

- Si $a \geq 0$ y n es par, entonces b es su raíz enésima principal si y sólo si:

$$b^n = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Ejemplo: $7^2 = 49 \quad \therefore \quad 7$ es la raíz cuadrada principal de 49.

- Si a es un número real y n es impar, entonces b es su raíz enésima principal si y sólo si:

$$b^n = a \quad \text{y} \quad b \text{ es un número real}$$

Ejemplo: $(-5)^3 = -125 \quad \therefore \quad -5$ es la raíz cúbica principal de -125.

Simbología:

Si b es raíz enésima principal de a, esto se simboliza de la siguiente forma:

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplos: $7 = \sqrt{49}$

$-5 = \sqrt[3]{-125}$

Observación: si $a < 0$ y n es par, entonces a no tiene raíz enésima principal real.

Apunte 1

Ejercicios 1

Apunte 2

Ejercicios 2

Propiedades

Sean a y b números reales positivos, m y n números naturales mayores que 1 y p número entero, entonces

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Ejemplo: $\left(\sqrt[3]{17}\right)^3 = 17$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

2) $\sqrt[n]{a} > 0$

Ejemplo: $\sqrt[3]{64} = 4 > 0$

3) n impar $\Rightarrow \sqrt[n]{-a} < 0$

Ejemplo: $\sqrt[3]{-729} = -9 < 0$

4) $\sqrt[n]{a^n} = a$

Ejemplo: $\sqrt[3]{8^3} = 8$

5) n impar $\Rightarrow \sqrt[n]{(-a)^n} = -a$

Ejemplo: $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

6) n par $\Rightarrow \sqrt[n]{(-a)^n} = a$

Ejemplo: $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5^2} = 5$

Observación: $a \in R \Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$

7) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$

Ejemplos: $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

8) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Ejemplos: $\dfrac{\sqrt[3]{2000}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2000}{2}} = \sqrt[3]{1000} = 10$

$\sqrt{\dfrac{15}{196}} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{196}} = \dfrac{\sqrt{15}}{14}$

9) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,n]{a}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$

10) $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

Ejemplo: $\sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

POTENCIA DE EXPONENTE RACIONAL

Definición:

Sean $a > 0$, n número natural mayor que 1 y p número entero, entonces:

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Propiedades:

Las potencias de exponente racional cumplen todas las propiedades de las potencias de exponente entero y además la siguiente:

$$a^{\frac{p}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

Ejemplo: $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

Observación: Las potencias de base positiva y exponente real, también cumplen todas las propiedades de las potencias de exponente entero.

RACIONALIDAD

Para determinar si una expresión real es racional o irracional, hay que tener presente lo siguiente:

- La suma y el producto de dos números racionales, son racionales.

$$\frac{a}{b} \in Q \;\wedge\; \frac{c}{d} \in Q \quad \Rightarrow \quad \frac{ad + bc}{bd} \in Q \;\wedge\; \frac{ac}{bd} \in Q$$

- La suma y el producto de un número racional no nulo y un número irracional, son irracionales.

  Ejemplo: $2 + \sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$ son irracionales.

- La suma y el producto de dos números irracionales, pueden ser racionales o irracionales.

  Ejemplos: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional,

  $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$ es racional,

  $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$ es irracional,

  $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$ es racional.

- Sean n un número natural mayor que 1 y a un entero positivo, entonces:

$$\sqrt[n]{a} \notin N \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} \in I$$

Ejemplo: $\sqrt{7}$ no es un número natural $\therefore$ es irracional.

Ⓒ NELSON LILLO TERÁN
Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

- Sean n un número impar positivo mayor que 1 y a un entero, entonces:

$$\sqrt[n]{a} \notin Z \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} \in I$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{-2}$ no es un número entero $\therefore$ es irracional.

- Sean n un número natural mayor que 1 y a un irracional, entonces:

$$\sqrt[n]{a} \in R \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} \in I$$

Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$ es un número real $\therefore$ es irracional.

RACIONALIZACIÓN

Ejemplos:

$$1)\ \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

$$2)\ \frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = 3\sqrt[3]{4}$$

$$3)\ \frac{12}{3-\sqrt{7}} = \frac{12}{3-\sqrt{7}} \times \frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \frac{12\left(3+\sqrt{7}\right)}{9-7} = 6\left(3+\sqrt{7}\right)$$

$$4)\ \frac{9}{1+\sqrt[3]{2}} = \frac{9}{1+\sqrt[3]{2}} \times \frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{9\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}{1+\sqrt[3]{2^3}}$$

$$= \frac{9\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}{3} = 3\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$$

BIBLIOGRAFÍA

Raíz (recursos interactivos en línea)

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588