TEOREMA DEL BINOMIO

TEOREMA DEL BINOMIO

Sean **a** y **b** números reales y además **n** y **k** números enteros, tal que $\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}$, entonces:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Donde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo: Desarrolle $(a + b)^4$.

Respuesta:

$$(a + b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k$$

$$= \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

TÉRMINO EMÉSIMO

Se determina el término emésimo haciendo $\mathbf{k = m - 1}$

Ejemplo: Determine el quinto término en el desarrollo de $(x + 2)^6$.

Respuesta:

$$(x + 2)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{6-k} 2^k$$

quinto término $\Rightarrow$ $m = 5$ $\Rightarrow$ $k = 4$ $\Rightarrow$

$$\binom{6}{4} x^{6-4} 2^4 = 16 \times \frac{6!}{4! \times 2!} x^2 = 240x^2$$

$\therefore$ El quinto término es $240x^2$.

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

TÉRMINO CENTRAL

Para n par

Cuando **n** es **par**, se determina el término central haciendo:

$$k = \frac{n}{2}$$

Ejemplo: Determine el término central en el desarrollo de $(p + q)^8$.

Respuesta:

$$(p + q)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} p^{8-k} q^k$$

$$k = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \binom{8}{4} p^{8-4} q^4 = \frac{8!}{4! \times 4!} p^4 q^4 = 70\, p^4 q^4$$

$\therefore$ El término central es $70\, p^4 q^4$.

Para n impar

Cuando **n** es **impar**, se determinan los términos centrales haciendo:

$$k = \frac{n-1}{2} \quad \text{y} \quad k = \frac{n+1}{2}$$

Ejemplo: Determine los términos centrales en el desarrollo de $(a - b)^7$.

Respuesta:

$$(a - b)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^{7} (-1)^k \binom{7}{k} a^{7-k} b^k$$

$$k = \frac{7-1}{2} = 3 \Rightarrow (-1)^3 \binom{7}{3} a^{7-3} b^3 = -\frac{7!}{3! \times 4!} a^4 b^3 = -35\, a^4 b^3$$

$$k = \frac{7+1}{2} = 4 \Rightarrow (-1)^4 \binom{7}{4} a^{7-4} b^4 = \frac{7!}{4! \times 3!} a^3 b^4 = 35\, a^3 b^4$$

$\therefore$ Los términos centrales son $-35\, a^4 b^3$ y $35\, a^3 b^4$.

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

COEFICIENTE DE UNA POTENCIA

Ejemplo: Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(3x^2 + 2x)^4$.

Respuesta:

$$(3x^2 + 2x)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (3x^2)^{4-k} (2x)^k = \sum_{k=0}^{4} 3^{4-k} \times 2^k \times \binom{4}{k} x^{8-k}$$

$$8 - k = 5 \quad \Rightarrow \quad k = 3 \quad \Rightarrow$$

$$3^{4-3} \times 2^3 \times \binom{4}{3} x^{8-3} = 96\,x^5$$

$\therefore$ El coeficiente de x^5 es 96.

TÉRMINO INDEPENDIENTE

Ejemplo: Determina el término independiente de x en el desarrollo de:

$$\left(x^2 + \frac{3}{x} \right)^6$$

Respuesta:

$$\left(x^2 + \frac{3}{x} \right)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (x^2)^{6-k} \left(\frac{3}{x} \right)^k = \sum_{k=0}^{6} 3^k \times \binom{6}{k} x^{12-3k}$$

$$12 - 3k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 4 \quad \Rightarrow$$

$$3^4 \times \binom{6}{4} x^{12 - 3 \times 4} = 1.215$$

$\therefore$ El término independiente de x es 1.215 .

BIBLIOGRAFÍA

Teorema del binomio (apunte en línea)

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588