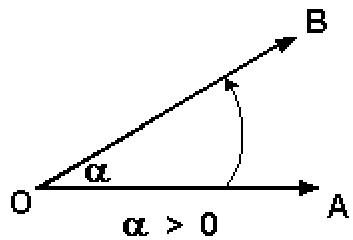
TRIGONOMETRÍA

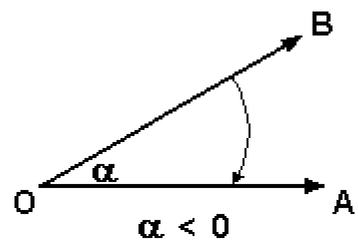
INTRODUCCIÓN

En un sentido básico, se puede afirmar que la Trigonometría es el estudio de las relaciones numéricas entre los ángulos y lados del triángulo. Pero su desarrollo la ha llevado a tener un objetivo más amplio, como se verá más adelante.

MEDICIÓN DE ÁNGULOS

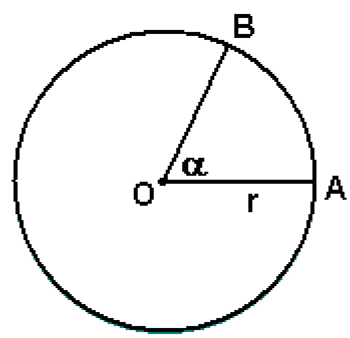
En Geometría los ángulos tienen medidas positivas solamente, en cambio, en Trigonometría un ángulo puede tener una medida positiva, nula o también negativa:





Observación: Cada ángulo de cualquier polígono se considera positivo.

Además del sistema sexagesimal, que asigna al ángulo completo una medida de 360º , existe otro sistema para medir ángulos, llamado sistema absoluto, cuya unidad es el radián (rad). Un ángulo del centro en una circunferencia tiene la magnitud de 1 rad , si el arco que subtiende tiene una longitud igual al radio de ésta.



$$\alpha = 1 \text{ rad} \Leftrightarrow \ell(\overset{\frown}{AB}) = r$$

En este sistema el ángulo completo mide 2π rad , por lo tanto:

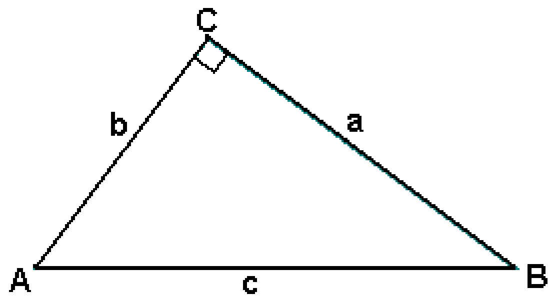
$$\pi \text{ rad equivalen a } 180º$$

Observación: Generalmente no se utiliza « rad » , cuando se da la medida de un ángulo en sistema absoluto.

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Dado el triángulo rectángulo en C :



Se definen:

Seno del ángulo en A (sen (A)): Cociente entre las longitudes del cateto opuesto al ángulo en A y de la hipotenusa:

$$\operatorname{sen}(A) = \frac{a}{c}$$

Coseno del ángulo en A (cos (A)): Cociente entre las longitudes del cateto adyacente al ángulo en A y de la hipotenusa:

$$\cos(A) = \frac{b}{c}$$

Tangente del ángulo en A (tan (A)): Cociente entre las longitudes del cateto opuesto y del cateto adyacente al ángulo en A:

$$\tan(A) = \frac{a}{b}$$

Cotangente del ángulo en A (cot (A)): Cociente entre las longitudes del cateto adyacente y del cateto opuesto al ángulo en A:

$$\cot(A) = \frac{b}{a}$$

Secante del ángulo en A (sec (A)): Cociente entre las longitudes de la hipotenusa y del cateto adyacente al ángulo en A:

$$\sec(A) = \frac{c}{b}$$

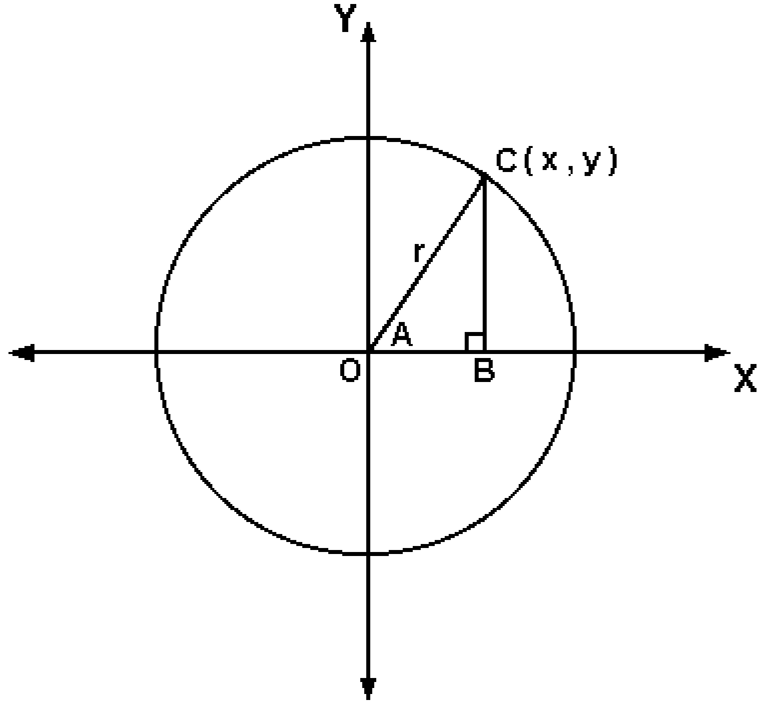
Cosecante del ángulo en A (csc (A)): Cociente entre las longitudes de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo en A:

$$\csc(A) = \frac{c}{a}$$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MEDIDA

Dada la figura siguiente:



Se definen:

$$\operatorname{sen}(A) = \frac{y}{r} \qquad \cos(A) = \frac{x}{r}$$

$$\tan(A) = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot(A) = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\sec(A) = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \csc(A) = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0)$$

Teorema 1: Dado un ángulo, el valor de cualquier razón trigonométrica depende únicamente de la magnitud de dicho ángulo.

Teorema 2: Si $A + B = 90^\circ$, entonces:

$$\operatorname{sen}(A) = \cos(B) \qquad \cos(A) = \operatorname{sen}(B)$$

$$\tan(A) = \cot(B) \qquad \cot(A) = \tan(B)$$

$$\sec(A) = \csc(B) \qquad \csc(A) = \sec(B)$$

Teorema 3: Si $n \in Z$, entonces:

$$\operatorname{sen}(A + 360^\circ \times n) = \operatorname{sen}(A)$$

$$\cos(A + 360^\circ \times n) = \cos(A)$$

$$\tan(A + 180^\circ \times n) = \tan(A)$$

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

SIGNO DE CADA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA EN CADA CUADRANTE

Cuadrante	sen (A)	cos (A)	tan (A)
1º	+	+	+
2º	+	–	–
3º	–	–	+
4º	–	+	–

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

Sea $0^\circ < A < 90^\circ$, entonces:

2º Cuadrante

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A$$
$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A$$
$$\tan(180^\circ - A) = -\tan A$$

3er Cuadrante

$$\sin(180^\circ + A) = -\sin A$$
$$\cos(180^\circ + A) = -\cos A$$
$$\tan(180^\circ + A) = \tan A$$

4º Cuadrante

$$\sin(360^\circ - A) = -\sin A$$
$$\cos(360^\circ - A) = \cos A$$
$$\tan(360^\circ - A) = -\tan A$$

ÁNGULOS NEGATIVOS

$$\sin(-A) = -\sin(A)$$
$$\cos(-A) = \cos(A)$$
$$\tan(-A) = -\tan(A)$$

© NELSON LILLO TERÁN

Junio 2017

http://www.eneayudas.cl

matematicayciencias@gmail.com

+56998581588

TABLA BÁSICA DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

x		sen (x)	cos (x)	tan (x)
0º	0	0	1	0
30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90º	$\frac{\pi}{2}$	1	0	indefinida
120º	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135º	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150º	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180º	π	0	-1	0
210º	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225º	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240º	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270º	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	indefinida
300º	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315º	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330º	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360º	2π	0	1	0

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$\operatorname{sen}(A)\csc(A) = 1 \qquad (\operatorname{sen}(A) \neq 0)$

$\cos(A)\sec(A) = 1 \qquad (\cos(A) \neq 0)$

$\tan(A)\cot(A) = 1 \qquad (\operatorname{sen}(A)\cos(A) \neq 0)$

$$\tan(A) = \frac{\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)} \qquad (\cos(A) \neq 0)$$

$$\cot(A) = \frac{\cos(A)}{\operatorname{sen}(A)} \qquad (\operatorname{sen}(A) \neq 0)$$

$\operatorname{sen}^2(A) + \cos^2(A) = 1$

$\sec^2(A) = 1 + \tan^2(A) \qquad (\cos(A) \neq 0)$

$\csc^2(A) = 1 + \cot^2(A) \qquad (\operatorname{sen}(A) \neq 0)$

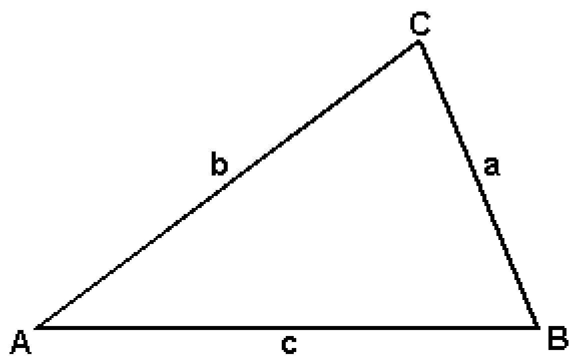
$\operatorname{sen}(2A) = 2\operatorname{sen}(A)\cos(A)$

$\cos(2A) = \cos^2(A) - \operatorname{sen}^2(A)$

$$\tan(2A) = \frac{2\tan(A)}{1 - \tan^2(A)} \qquad (\tan(A) \neq \pm 1)$$

LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

Dado un triángulo ABC cualquiera:



Siempre se cumple lo siguiente:

Ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(C)}{c}$$

Se aplica cuando se conocen las medidas de:

a) Dos lados y uno de los ángulos opuestos a ellos.

b) Dos ángulos y un lado.

Junio 2017
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588

Ley de los cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

Se aplica cuando se conocen las medidas de:

a) Los tres lados.

b) Dos lados y el ángulo comprendido por ellos.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

También es posible definir la razón trigonométrica de un número real, por ejemplo, el seno del real x es $\operatorname{sen}(x)$, en esta última expresión el ángulo está medido en radianes:

$$\operatorname{sen}(\pi/6) = 0{,}5$$

De esa forma se define la función seno (Sen):

$$\mathrm{Sen} = \{(x, y) : y = \operatorname{sen}(x)\}$$

Análogamente se definen función coseno (Cos) y función tangente (Tan).

A continuación se da una tabla de funciones trigonométricas y sus inversas. Las restricciones que se imponen al dominio tienen como propósito lograr que las funciones sean biyectivas. De esa forma sus inversas también son funciones.

FUNCIÓN	DOMINIO	CODOMINIO	IMAGEN DE x
SENO	$\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1 ; 1]$	$f(x) = \operatorname{sen}(x)$
COSENO	$[0 ; \pi]$	$[-1 ; 1]$	$f(x) = \cos(x)$
TANGENTE	$\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$	R	$f(x) = \tan(x)$
INVERSA DEL SENO	$[-1 ; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$	$f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x)$
INVERSA DEL COSENO	$[-1 ; 1]$	$[0 ; \pi]$	$f(x) = \cos^{-1}(x)$
INVERSA DE LA TANGENTE	R	$\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$	$f(x) = \tan^{-1}(x)$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
+56998581588